ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Колесников

Содержание

1.	Элементарная теория вероятностей. Основные понятия и классические модели.	1
2.	Условная вероятность. Независимость. Случайные величины.	4
3.	Основания теории вероятностей. Построение мер. Теорема Колмогорова.	8
4.	Вероятностное пространство. Случайные величины. Характеристики случайных величин. Основные вероятностные распределения. Случайный вектор. Независимость.	13
5.	Случайные векторы. Геометрические вероятности. Ковариация и корреляция.	19
6.	Теорема Радона-Никодима. Условное математическое ожидание. Условные меры.	23
	Список литературы	27

1. Элементарная теория вероятностей. Основные понятия и классические модели.

Пусть нам дано конечное множество

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\},$$

называемое в дальнейшем пространством элементарных исходов. Элементы множества Ω называются элементарными исходами. Всевозможные подмножества Ω называются событиями. Всего существует 2^N событий. Как правило, в задачах по теории вероятностей множество Ω не задано явно и его надо сконструировать (или воспользоваться готовой стандартной конструкцией).

Операции над множествами

1) Сложение (объединение): $A + B$ $(A \cup B)$
2) Произведение (пересечение): AB $(A \cap B)$
3) Дополнение: A^c $(\Omega \setminus A)$
4) Разность: $A \setminus B$
5) Симметрическая разность: $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Пример 1.1. *Монета подбрасывается n раз подряд. Результат подбрасывания записывается как последовательность выпавших гербов и решеток. Это — элементарный исход. Всего множество Ω содержит 2^n элементарных исходов. Например, при двух подбрасываниях*

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}.$$

Примеры событий:

$$A = \{\textit{выпало одинаковое количество гербов и решеток}\} = \{\text{ГР}, \text{РГ}\},$$

$$B = \{\textit{первым выпал герб}\} = \{\text{ГГ}, \text{ГР}\}.$$

Пример 1.2. *Дано n различных элементов. Производится выборка k $(1 \le k \le n)$ элементов из n. Результат выборки — элементарный исход.*

Необходимо различать два важных случая. Выборки могут быть упорядоченными и неупорядоченными. В каждом случае получается свое пространство элементарных исходов. Число упорядоченных выборок может быть найдено по формуле

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Если мы имеем дело с неупорядоченными выборками, то их число меньше ровно в $k!$ *раз (число возможных перестановок множества их* k *элементов) и равно*

$$C_n^k = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Элементарные свойства операций над множествами (правила де Моргана)

$$\bigcup_{i=1}^n A_i^c = \Big(\bigcap_{i=1}^n A_i\Big)^c, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i^c = \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)^c$$

Определение 1.3. *Функция* P*, сопоставляющая каждому событию* $A \subset \Omega$ *число, называется вероятностью (вероятностным распределением), если*

1)
$$0 \le P(A) \le 1 \text{ и } P(\Omega) = 1$$

2)
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

для непересекающихся событий A, B.

Замечание 1.4. *Очевидно, свойство 2) (аддитивность) распространяется на конечные наборы непересекающихся событий*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \ne j.$$

Несколько забегая вперед, отметим, что в случае бесконечных Ω *требуется выполнение более сильного свойства (счетная аддиттивность)*

$$P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i), \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \ne j.$$

Замечание 1.5. *В силу конечности* Ω *функцию* P *достаточно задать на каждом элементарном исходе. Тогда в силу аддитивности*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Пример 1.6. *В ситуации примера 1.1 предположим, что выпадение герба и решетки равновероятно. Тогда все элементарные исходы равновероятны. Естественно считать, что* $P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$ *для каждого элементарного исхода. Функция* P*, определяемая равенством* $P(A) = \frac{1}{2^n}\mathrm{card}(A)$ *является вероятностью на* Ω.

Пример 1.7. *(Биномиальное распределение). В ситуации примера 1.1 для каждого исхода* ω*, содержащего* k *гербов и* $n-k$ *решеток положим*

$$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k},$$

где p *и* q *— фиксированные числа, удовлетворяющие условиям* $0 < p < 1$, $p+q = 1$. *Для того, чтобы проверить, что* P *— вероятность, достаточно показать, что* $P(\Omega) = 1$. *Действительно, положим* $A_k = \{\text{выпало ровно } k \text{ гербов}\}$. *Заметим, что* A_k *содержит* C_n^k *элементов (неупорядоченная выборка* k *ячеек из* n *доступных). Тогда* $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. *Следовательно,* $P(\Omega) = \sum_{k=0}^n P(A_k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$.

Теорема 1.8. *(Формула включений и исключений). Для двух событий* A, B *выполнено соотношение*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Более общим образом

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{i<j\le n} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k\le n} P(A_i A_j A_k) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n).$$

Упражнение 1.9. *В урне содержится 1000 лотерейных билетов, пронумерованных числами от 1 до 1000. Вы вытягиваете наугад билет. Что вероятнее, вынуть билет с номером, делящимся на 2, 3 или 5, или не делящимся ни на одно из этих чисел?*

Упражнение 1.10. *(Задача о беспорядке). Используя формулу включений-исключений, доказать, что вероятность того, что в перестановке из первых n натуральных чисел ни один элемент не стоит на своем месте равна*

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e}.$$

Пример 1.11. *(Гипергеометрическое распределение) Задан набор из r цветов. В урне содержится $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_r$ шаров, причем ровно M_i из них имеют i-й цвет. Случайным образом производится выборка (без возвращения) $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ шаров, $n_i \leq M_i$. Найти вероятность того, что ровно n_i из них будут i-го цвета. Ответ:*

$$\frac{C_{M_1}^{n_1} \cdot C_{M_2}^{n_2} \cdots C_{M_r}^{n_r}}{C_M^n}.$$

В следующем примере мы познакомимся с распределением на бесконечном множестве.

Пример 1.12. *(Распределение Пуассона). Для натурального n положим*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$0 \leq k \leq n$, (вероятность k успехов в биномиальном распределении). Нетрудно видеть, что при $n \to \infty$ и $np \to \lambda$

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Распределение на множестве целых неотрицательных чисел, заданное формулой $P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ называется распределением Пуассона с параметром λ (нетрудно видеть, что это действительно вероятностное распределение).

Упражнение 1.13. *Вероятность брака некоторого изделия равна $0,002$. Найти приближенно вероятность того, что в партии из 1000 изделий не больше двух бракованных.*

Пример 1.14. *(Случайное блуждание) Частица перемещается по прямой на шаг длины 1 с вероятностью p вправо или с вероятностью $q = 1 - p$ влево независимо от движения на предыдущих шагах. Пусть X — смещение частицы за n шагов. Тогда $\frac{X+n}{2}$ распределено биномиально, т.е. $P(\frac{X+n}{2} = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.*

Занятие 1

1) Доказать следующие свойства операций над событиями $A \Delta B = (AB^c)^c \Delta (A^c B)^c$, $(A \Delta B)^c = AB \cup A^c B^c$
$$\cup_{i=1}^n \cap_{k=i}^n A_k = \cap_{i=1}^n \cup_{k=i}^n A_k$$
2) Представить объединение событий $A_1, \cdots, A_n$ в виде объединения n непересекающихся событий.
3) Пусть $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ — бесконечная последовательность событий. Записать в виде формул события
$$B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ для бесконечного числа событий } A_n\ \}$$
$$C = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ для всех событий } A_n \text{ за исключением, м. б., конечного числа } \}$$
4) Доказать неравенства
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$
$$P(\cap_{i=1}^n A_i) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - (n-1)$$
6) Доказать формулу включений-исключений
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k\leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n).$$

7*) Десять процентов сферы закрашено в черный свет, остальное — в белый. Доказать, что в сферу можно вписать куб таким образом, что все вершины будут белыми.

8) (Задача о днях рождения) Найти вероятность того, что в группе из n человек хотя бы у двоих совпадают дни рождения.

9) 40 шахматистов разбиваются на 4 равные команды. Найти вероятность, что четверо сильнейших окажутся в разных группах.

10) Брошено 6 игральных костей. Найти вероятности событий 1) на всех костях выпало одинаковое число очков, 2) на всех костях выпало разное число очков, 3) сумма выпавших очков равна 7.

11) 1) Вы раскладываете случайным образом $n+2$ шара по n ящикам. Найти вероятность того, что по крайней мере один ящик будет пустым. 2) Вы раскладываете случайным образом $n+1$ шара по n ящикам. Найти вероятность того, что ровно два ящика будут пустыми.

12) (Задача о гадании). Девушка зажимает в руке 6 травинок, так чтобы концы торчали и сверху и снизу. Подруга связывает концы травинок попарно сверху и снизу в отдельности. Если травинки оказываются связанными в кольцо, то это должно означать, что девушка в этом году выйдет замуж. Найти вероятность того, что травинки при связывании образуют кольцо. Тот же вопрос для случая $2n$ травинок.

13) (Геометрическое распределение). Игроки A, B подбрасывают кость (в порядке AB...). Тот, у кого выпало 6, проигравший. Найти вероятность того, что произведено n бросаний. Найти вероятность того, что A — проигравший.

14) Игроки A, B, C подбрасывают кость (в порядке ABC...). Тот, у кого выпало 6, выбывает. Найти вероятность того, что A — 1) первый, 2) второй по счету выбывший.

15) (Закон Мэрфи) Монета подбрасывается бесконечное число раз. Доказать, что любая заданная последовательность длины n встретится с вероятностью 1.

16) В каждой пачке с некоторым товаром содержится одно из r опасных веществ (с одинаковой вероятностью). Найти вероятность собрать все опасные вещества при покупке $n > r$ пачек.

2. Условная вероятность. Независимость. Случайные величины.

Определение 2.1. *Пусть A — событие, причем $P(A) > 0$. Условной вероятностью $P(B|A)$ события B при условии A называют величину*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Можно говорить, что $P(B|A)$ — это вероятность события B, при условии, что A уже случилось.

Упражнение 2.2. *Дана колода карт. Какова вероятность, что сверху лежит туз? Предположим теперь, что вы знаете, что снизу лежит туз. Какова теперь (условная) вероятность, что сверху лежит туз? Найдите ее прямым подсчетом. Найдите теперь эту вероятность, исходя из определения условной вероятности и убедитесь, что результаты совпадают.*

Следующие соотношения несложно вывести из определения.

Теорема 2.3. *Пусть B_i, $1 \le i \le n$ — непересекающиеся события, в сумме дающие Ω (разбиение Ω). Тогда выполнены соотношения*

1) *Формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

2) *Формула Байеса*

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

3) *Формула умножения вероятностей*

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1|A_2A_3\cdots A_n)P(A_2|A_3\cdots A_n)\cdots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n).$$

Упражнение 2.4. *Вы проходите тест на заболевание одной редкой болезнью (1 шанс из 100000). Если вы больны, тест определит это с вероятностью 0.95. Если нет, то тест выдаст ложно-положительный результат с вероятностью 0, 005. Тест выдает положительный результат. Какова вероятность того, что вы действительно больны? Ответ* $\simeq 0,002$.

Упражнение 2.5. *Студент получает на экзамене 5 задач из 100 возможных. Используя 1) гипергеометрическое распределение, 2) формулу умножения вероятностей, найдите вероятность того, что студент решит задачи, если он умеет решать ровно 95 из них.*

Определение 2.6. *Два события A, B называются независимыми, если*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

События $A_1, A_2, \cdots, A_n$ называется независимыми (независимыми в совокупности), если

$$P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

для любого набора индексов $I \subset \{1, \cdots, n\}$.

Замечание 2.7. *(Пример С. Бернштейна). Даже для трех событий попарная независимость отличается от независимости в совокупности. Рассмотрим тетраэдр, одна сторона которого окрашена в красный, другая в желтый, третья в зеленый свет, а четвертая окрашена всеми тремя цветами. Докажите, что события "при случайном падении тетраэдра на нижней грани есть красный (желтый, зеленый) цвет" попарно независимы, но не независимы в совокупности.*

Естественный пример независимых событий дает следующая простая конструкция (прямое проведение вероятностных мер). Пусть $\{\Omega_i\}$ — набор пространств элементарных исходов, $1 \le i \le n$, наделенных вероятностями P_i. Рассмотрим новое пространство

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i,$$

являющееся прямым произведением Ω_i. Определим вероятность на Ω, положив

$$P(\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(\{\omega_i\}).$$

Функция P действительно является вероятностью, потому что

$$\sum_{\omega\in\Omega} \prod_{i=1}^{n} P_i(\{\omega_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{\omega_i\in\Omega_i} P_i(\{\omega_i\}) = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Пусть теперь $\{A_i\}$ — набор множеств, причем

$$A_i = \prod_{i=1}^{n} X_j, \ X_j \subset \Omega_j$$

где $X_j = \Omega_j$, если $j \neq i$. Т.е., каждое событие A_i есть “параллелепипед“, у которого все основания совпадают с соответствующим пространством Ω_j за исключением, может быть, Ω_i. Проверьте самостоятельно независимость событий A_i.

В дальнейшем пространство элементарных исходов Ω, наделенное вероятностью P, будем называть вероятностным пространством.

Определение 2.8. *Случайной величиной (с.в.) называется функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ на вероятностном пространстве Ω.*

Заметим, что для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ величина $f(\xi)$ тоже является случайной величиной.

Определение 2.9. *Случайные величины $\xi_1, \cdots, \xi_n$ называются независимыми, если для любого набора чисел $\{x_i\}$, $1 \le i \le n$, события $A_i = \xi_i^{-1}(x_i)$ являются независимыми в совокупности. Т.е.*

$$P(\xi_1 = x_1, \cdots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) \cdots P(\xi_n = x_n).$$

Что эквивалентно соотношению

$$P(\xi_1 \in B_1, \cdots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

для любого набора множеств B_i.

Пример 2.10. *В ситуации примера 1.1 положим $\xi_i = 1$, если i-й бросок дал герб и $\xi_i = 0$, если решетку. Тогда $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых случайных величин. Всюду далее они будут называться бернуллиевскими с.в. Сумма n независимых бернуллиевских с.в. называется биномиальной с.в. с параметрами n, p.*

Характеристики случайных величин

Определение 2.11. *Математическим ожиданием с.в. ξ называется величина*

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega_i \in \Omega} \xi(\omega_i) P(\{\omega_i\}) = \sum_{x_i \in \xi(\Omega)} x_i P(\{\xi_i = x_i\}).$$

Математическое ожидание также называют средним с.в. ξ, что вполне соответствует интуитивному представлению о среднем значении ξ.

Свойства математических ожиданий

1)
$$\mathbb{E}(c_1\xi + c_2\eta) = c_1\mathbb{E}(\xi) + c_2\mathbb{E}(\eta)$$

2) Если ξ и η независимы, то
$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta).$$

Первое свойство очевидно, для доказательства второго достаточно заметить, что

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_i z_i P(\xi \cdot \eta = z_i) = \sum_i z_i \sum_{k,l: x_k y_l = z_i} P(\xi = x_k, \eta = y_l)$$
$$= \sum_{k,l} x_k y_l P(\xi = x_k) P(\eta = y_l) = \Big(\sum_k x_k P(\xi = x_k)\Big)\Big(\sum_l y_l P(\eta = y_l)\Big) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta).$$

Определение 2.12. *Дисперсией с.в. ξ называется величина*

$$D\xi = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

Дисперсия является одной из простейших мер отклонения с.в. от своего среднего. Из определения следует

$$D\xi = \sum_i x_i^2 P(\xi = x_i) - \big(\sum_i x_i P(\xi = x_i)\big)^2$$

(здесь и далее $\sum_i$ пишется для краткости вместо $\sum_{x_i \in \xi(\Omega)}$).

Упражнение 2.13. *Докажите, что*

1)
$$D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2.$$
В частности, ξ неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда ξ — постоянная с.в.

2)
$$D(c\xi) = c^2 D(\xi)$$

3) *Используя свойство математического ожидания произведения независимых с.в. докажите, что*
$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta),$$
если ξ и η независимы.

Пример 2.14. *Пусть ξ_i — последовательность независимых бернуллиевских с.в. (см. Пример 2.10) и*

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n$$

число успехов в n испытаниях (биномиальная с.в.). Очевидно,

$$\mathbb{E}(\xi_i) = 1 * p + 0 * q = p, \quad D(\xi_i) = 1 * p + 0 * q - p^2 = pq.$$

В силу линейности

$$\mathbb{E}S_n = np.$$

В силу независимости

$$D(S_n) = npq.$$

Пример 2.15. *Пусть ξ — пуассоновская с.в. с параметром λ, т.е.*

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}(\xi) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

Несложно проверить, что

$$D\xi = \lambda.$$

Пример 2.16. *(Задача о беспорядке) n конвертов с разными адресами и вложенными в них письмами рассыпали на полу. Все письма вылетели из конвертов. Случайным образом письма раскладываются по конвертам. Найти математическое ожидание и дисперсию числа ξ дошедших по адресу писем.*

Пусть $\xi_i = 1$, если i-е письмо попало в свой конверт и $\xi_i = 0$ в противном случае. Имеем: $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда $\mathbb{E}\xi = n\mathbb{E}\xi_1 = n\frac{1}{n} = 1$. Далее, $D\xi = \mathbb{E}\sum_i \xi_i^2 + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j) - (\mathbb{E}\xi)^2 = n\mathbb{E}\xi_1^2 + 2\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - 1 = 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Пример 2.17. *(Д. Бернулли) $2n$ человек образуют n пар. Из них ровно m человек умерло. Найти среднее число выживших пар.*

Пусть A_i — событие "i-я пара выжила". Тогда $P(A_i) = C_{2n}^m / C_{2n-2}^m = (1 - m/2n)(1 - m/(2n-1))$. Следовательно, $\mathbb{E}\xi = \sum_n \mathbb{E}I_{A_i} = n(1 - m/2n)(1 - m/(2n-1))$.

Производящие функции

Определение 2.18. *Пусть ξ принимает значения в $\{0\} \cup \mathbb{N}$. Производящей функцией с.в. ξ называется функция*

$$G_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)x^k.$$

Пример 2.19. *Для пуассоновской с.в. ξ*

$$G_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}x^k = e^{\lambda(x-1)}.$$

Лемма 2.20. *Если ξ и ν — независимые с.в., и $\theta = \xi + \eta$ то*

$$P(\theta = k) = \sum_{i\in\xi(\Omega)} P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i\in\xi(\Omega)} P(\xi = i)P(\eta = k - i).$$

Отсюда несложно вывести следующий результат.

Теорема 2.21. *Если ξ и η независимы, то*

$$G_{\xi+\eta} = G_\xi \cdot G_\eta.$$

Подробнее о производящих функциях можно узнать в книгах [6], [4].

Занятие 2

1) Урна содержит n пронумерованных шаров $1, \cdots, n$. Вынимаются k шаров (без возвращения) и считается сумма вынутых номеров. Найти математическое ожидание и дисперсию этой суммы. Указание: использовать свойства математических ожиданий и дисперсии аналогично Примеру 2.16.
2) Пусть A и B — независимые события. Выразить через $P(A), P(B)$ вероятности событий, что произошло в точности k, по меньшей мере k и самое большее k из событий A, B ($k = 0, 1, 2$).
3) Для прохождения теста кандидату разрешаются три попытки. В случае $j-1$ провалов, вероятность провала в j-й раз равна p_j. Пусть $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.75$. Найти вероятность 1) пройти тест на второй попытке, 2) пройти тест на третьей попытке, 3) пройти тест, при условии, что первая попытка была неудачной, 4) при условии, что тест успешно пройден, найти вероятность его прохождения на второй попытке.

4) В урне есть шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковой вероятностью. В урну кладут белый шар, а потом наугад извлекают один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что оставшийся тоже белый.
5) В пруду водится b ершей и c карасей. 1) Вы поймали n рыб. Найти вероятность того, что среди них x ершей. 2) Вы поймали n рыб и выпустили их обратно. Потом вы поймали m рыб. Найти вероятность того, что k ершей были пойманы дважды.
6) Пусть событие A не зависит от $B_n, n \geq 1$, при этом $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$. Доказать независимость событий A и $\cup_n^\infty B_n$.
7) У человека пять монет в кармане. Две с двумя гербами, одна с двумя решетками и две нормальные. 1) Человек закрывает глаза, достает наугад монету и подкидывает. Найти вероятность того, что нижняя сторона — герб. 2) Он открывает глаза и видит, что сверху герб. Какова вероятность того, что снизу герб? 3) Он закрывает глаза и подкидывает монету снова. Какова вероятность того, что нижняя сторона — герб? 4) Он открывает глаза и видит, что сверху герб. Какова вероятность того, что снизу герб?
8) (Рекуррентные соотношения и граничные условия). Вы приходите в казино с k\$. За одну партию вы выигрываете 1\$ с вероятностью p и проигрываете 1\$ с вероятностью $q = 1-p, p < 1/2$. Если у вас остается 0\$, вы уходите. Если вы приобретаете K\$, где $K > k$ — некоторая фиксированная сумма, вы тоже уходите. Найти вероятность $p(k)$ того, что вы уйдете ни с чем. Указание: Используя условные вероятности доказать, что $p(k) = pp(k+1) + qp(k-1)$. Используя граничные условия $p(0) = 1, p(K) = 0$ вывести формулу для $p(k)$.
9) Монета подкидывается неограниченное число раз. Вероятность выпадения герба равна p. Назовем очередью длины r последовательность из r гербов (решеток), не включенную в последовательность гербов (решеток) большей длины. Пусть событие E состоит в том, что очередь из r гербов появляется раньше, чем очередь из r решеток. Обозначим через A результат первого бросания. Доказать, что
$$P(E|A = \Gamma) = p^{r-1} + (1 - p^{r-1})P(E|A = \mathrm{P}).$$
Написать аналогичное выражение для $P(E|A = \mathrm{P})$ и найти $P(E)$.
10) Монета побрасывается n раз, выпадает a гербов ($p = q = 1/2$). Найти вероятность того, что в ней есть ровно k очередей из гербов и ровно k очередей из решеток.
11) n пассажиров в самолете получают посадочные талоны. Первый пассажир, зашедший в самолет, выбирает место случайным образом. Каждый последующий садится на свое место, если оно не занято. Если занято, то выбирает место из свободных случайным образом. Найти вероятность p_n того, что последний пассажир сядет на свое место.
12) Найти производящую функцию биномиальной с.в. с параметрами p, n.
13) Пусть X, Y — независимые биномиальные с.в. с параметрами p, n. Найти
$$P(X = k|X + Y = m).$$
14) Доказать, что сумма независимых пуассоновских с.в. с параметрами λ, μ есть пуассоновская с.в. с параметрами $\lambda + \mu$.
15) Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек равна $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ Вероятность для каждого позвонившего, что он не получит ответ на свой вопрос, равна p. Найти вероятность того, что ровно s обратившихся не получат ответы на свои вопросы.
16) (Задача Галилея) Независимым образом бросаются три кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10. Указание: использовать производящие функции.

17)* Найти вероятность получения счастливого билета в трамвае.

18) Вывести формулу включений-исключений из свойств математического ожидания.
19) Во время дуэли между противниками A и B происходит серия ударов. Либо A поражает B с вероятностью p, либо B поражает A с вероятностью $1 - p$. Если один из противников наносит два последовательных удара, он объявляется победителем. Найти математическое ожидание продолжительности дуэли.

3. Основания теории вероятностей. Построение мер. Теорема Колмогорова.

Рассмотрим пространство Ω, которое больше не предполагается конечным.

Определение 3.1. *Алгеброй $\mathcal{A}$ называется любая система подмножеств множества Ω, удовлетворяющая свойствам*

1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$;
2) *если* $A, B \in \mathcal{A}$, *то* $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Определение 3.2. *Алгебра* $\mathcal{A}$ *называется* σ*-алгеброй, если* $\cup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *для любой последовательности множеств* A_n *из* $\mathcal{A}$.

Будем говорить, что σ-алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$ порождена алгеброй $\mathcal{A}$, если $\tilde{\mathcal{A}}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$.

Определение 3.3. *Пусть* $\Omega = X$ *— топологическое пространство. Борелевской* σ*-алгеброй* $\mathcal{B}(X)$ *называется наименьшая* σ*-алгебра, содержащая все открытые множества.*

Определение 3.4. *Числовая функция* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$ *называется конечно-аддитивной (конечно-аддитивной мерой), если*

$$\mu(\cup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j.$$

Определение 3.5. *Числовая функция* μ *на* $\mathcal{A}$ *на* σ*-алгебре* $\mathcal{A}$ *называется мерой (счетно-аддитивной мерой), если*

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j.$$

Упражнение 3.6. *Доказать, что свойство счетной аддитивности равносильно условию* $\lim_n \mu(A_n) = 0$ *для любой последовательности вложенных множеств* $\{A_n\}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Определение 3.7. *Семейство* $\mathcal{K}$ *подмножеств* Ω *называется компактным классом, если для всякой последовательности* K_n *его элементов* $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ *существует такое* N*, что* $\cap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$.

Например, произвольное семейство компактных подмножеств топологического пространства X является компактным классом.

Пусть μ — неотрицательная аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}$. Компактный класс $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ называется приближающим для $\mathcal{A}$, если для любого $A \in \mathcal{A}$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $K \in \mathcal{K}$, $K \subset A$, что

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Теорема 3.8. *Если неотрицательная аддитивная функция* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$ *обладает приближающим компактным классом, то* μ *счетно-аддитивна на* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Докажем, что $\lim_n \mu(A_n) = 0$ для последовательности вложенных множеств с пустым пересечением. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого n найдем $K_n \subset A_n$, $K_n \in \mathcal{K}$, со свойством $\mu(A_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Так как $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\cap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ для некоторого N. Заметим, что

$$A_N = \cap_{i=1}^{N} A_n \subset \cup_{i=1}^{N} (A_n \setminus K_n).$$

Действительно, если $x \in A_N$, то $x \in A_n$, $1 \leq n \leq N$. Если $x \notin \cap_{i=1}^{N} (A_n \setminus K_n)$, то $x \notin A_n \setminus K_n$ для всех $1 \leq n \leq N$ и тогда $x \in K_n$ для всех $1 \leq n \leq N$. Это противоречит тому, что $\cap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$. Поэтому

$$\mu(A_N) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(A_n \setminus K_n) \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \leq \varepsilon.$$

□

Пример 3.9. *Рассмотрим куб* I *в* $\mathbb{R}^n$ *и алгебру конечных объединений параллелепипедов из* I*, являющихся произведениями одномерных промежутков (отрезков, интервалов и полуинтервалов). Очевидно, обычный объем обладает компактным приближающим классом. Следовательно, объем счетно-аддитивен на этой алгебре.*

Следующую важную теорему теории меры (известную как теорему Каратеодори) мы приведем без доказательства.

Теорема 3.10. *Конечная неотрицательная счетно-аддитивная функция* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$ *обладает единственным неотрицательным счетно-аддитивным продолжением на* σ*-алгебру, порожденную* $\mathcal{A}$.

Указанное продолжение можно задать формулой

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),\ A_n \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big\}.$$

Заметим, что приведенная формула имеет смысл для любого подмножества Ω. Полученная функция называется внешней мерой. При этом она теряет свойство быть счетно-аддитивной на множестве всех подмножеств. Вместо этого выполнено свойство субаддитивности

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Тем не менее, мера μ счетно-аддитивна даже на более широком классе множеств, чем σ-алгебра, порожденная $\mathcal{A}$.

Определение 3.11. *Пусть μ — счетно-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Множество A называется μ-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A_\varepsilon \subset \mathcal{A}$, что $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Оказывается, семейство всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, которую мы будем обозначать в дальнейшем $\mathcal{A}_\mu$. Продолжение, построенное в теореме Каратеодори, является счетно-аддитивной мерой на σ-алгебре $\mathcal{A}_\mu$. Применяя теорему о продолжении к объему в $\mathbb{R}^n$, мы получаем *меру Лебега* λ_n на $\mathbb{R}^n$. Измеримое по Лебегу множество имеет вид $B \cup C$, где B — борелевское множество, а C — множество (внешней) меры нуль. Так как существуют неборелевские множества меры нуль (например, подмножества канторова множества меры нуль), то этот класс множеств шире борелевской σ-алгебры. Меры, определенные на борелевской σ-алгебре топологического пространства X будем называть борелевскими.

Приведем примеры на построение мер.

Пример 3.12. *Меры на $\mathbb{R}^1$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с возрастающими функциями. Более точно, если F — ограниченная, неубывающая и непрерывная слева функция, причем $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, то существует и единственна неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условию $\mu(-\infty, t) = F(t)$.*

Заметим, что множество точек разрыва S функции F не более чем счетно. μ можно определить на $[a, b]$ по формуле $F(b) - F(a)$, если $a \notin S, b \notin S$ (a, b могут принимать значения $\pm\infty$). Рассмотрим алгебру A состоящую из конечных объединений таких интервалов. Нетрудно доказать (используя компактный приближающий класс из отрезков и непрерывность F на S), что так определенная функция счетно-аддитивна на алгебре $\mathcal{A}$. Далее нужно воспользоваться теоремой о продолжении мер.

Обратно, по мере μ можно построить функцию $F(t) = \mu(-\infty, t)$ (функцию распределения), которая будет обладать указанными выше свойствами.

Определение 3.13. *Мера μ на Ω называется вероятностной, если μ неотрицательна и $\mu(\Omega) = 1$.*

Пример 3.14. *Пусть ρ — неотрицательная функция на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$. Функция измеримых множеств, заданная равенством*

$$\mu(A) = \int_A \rho\ dx,$$

является вероятностной мерой.

Пример 3.15. *Пусть $\{\mu_i\}$, $1 \leq i \leq n$ — конечный набор борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}$. На каждом множестве вида $I = \prod_{i=1}^n I_i$, где I_i — промежуток на прямой (n-мерном промежутке), определим функцию множества*

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}\mu_i(I_i).$$

Очевидно, μ можно продолжить до конечно-аддитивной функции множеств на алгебре конечных объединений n-мерных промежутков. Заметим, что конечные объединения компактных промежутков дают компактный приближающий класс. Действавительно, достаточно доказать свойство приближаемости для одного промежутка $I = \prod_{i=1}^n I_i$. Найдем компактный промежуток $\tilde{I}_i$ со свойством $\tilde{I}_i \subset I_i$, $\mu_i(I_i \setminus \tilde{I}_i) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu(I \setminus \tilde{I}) \leq n\varepsilon,$$

где $\tilde{I} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{I}_i$. Следовательно, по теореме о продолжении существует счетно-аддитивное продолжение μ на борелевскую σ-алгебру в $\mathbb{R}^n$.

Пусть нам дано (вообще говоря, несчетное) множество индексов T. Обозначим через $[0,1]^T$ прямое произведение T копий $[0,1]$. Точку $x \in [0,1]^T$ можно представлять себе как набор координат $(x_t), t \in T$, $x_t \in [0,1]$.

Определение 3.16. *Назовем цилиндром в пространстве $[0,1]^T$ любое множество вида $C = \prod_{t\in S} C_t \cdot [0,1]^{T\setminus S}$, где $S \subset T$ — некоторое конечное множество, а $C_t \subset [0,1]$ — одномерный промежуток.*

σ-алгебра, порожденная цилиндрами, называется цилиндрической.

На пространстве $[0,1]^T = \prod_{t=\in T}([0,1])_t$ вводится топология прямого призведения, в которой базой открытых множеств являются множества вида $U = \prod_{t\in S} U_t \cdot [0,1]^{T\setminus S}$, где $S \subset T$ — некоторое конечное множество, U_t — открытое множество. Согласно известной теореме Тихонова, прямое произведение компактных пространств всегда компактно.

Упражнение 3.17. *Докажите частный случай теоремы Тихонова для $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Используйте тот факт, что топология на $[0,1]^{\mathbb{N}}$ метризуема метрикой*

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|^2}{2^i}}.$$

Упражнение 3.18. *Докажите, что $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно канторовому множеству, а $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел.*

Упражнение 3.19. *Докажите, что цилиндрическая σ-алгебра счетного произведения отрезков совпадает с борелевской*

Заметим, что в случае произвольных топологических пространств, даже цилиндрическая σ-алгебра конечных произведений может на совпадать с борелевской.

Следующая теорема (А.Н. Колмогоров) является ключевой для классического подхода к аксиоматизации теории вероятностей (о других подходах см., например, в [6]). Немедленным ее следствием является, например, существование бесконечной последовательности независимых случайных величин с заданными функциями распределения. В дальнейшем эта теорема понадобится нам при изучении случайных процессов.

Теорема 3.20. *Пусть для каждого конечного набора индексов $S = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T$ задана вероятностная борелевская мера μ_S (конечномерное распределение) на $[0,1]^S$. Предположим, что эта система мер удовлетворяет условию согласованности*

$$\mu_{T_1}(A) = \mu_{T_2}(A \times [0,1]^{T_2\setminus T_1})$$

для $T_1 \subset T_2$. Определим функцию μ на каждом цилиндре

$$C = C_{t_1} \times C_{t_2} \cdots \times C_{t_n} \times [0,1]^{T\setminus S},$$

где C_{t_i} — одномерный промежуток, формулой

$$\mu(C) = \mu_S(C_{t_1} \times C_{t_2} \cdots \times C_{t_n}).$$

Функция μ однозначно продолжается до счетно-аддитивной вероятностной меры на цилиндрической σ-алгебре пространства $[0,1]^T$.

Доказательство. Условие согласованности обеспечивают корректность данного определения. Очевидно, функция μ продолжается до конечно-аддитивной функции множеств на алгебре, порожденной конечными объединениями цилиндров. Класс цилиндров с компактными основаниями C_{t_i} (C_{t_i} — отрезок) является компактным классом, как прямое произведение компактных пространств (так как проверка компактности класса ведется для счетного числа цилиндров, достаточно воспользоваться теоремой Тихонова для счетных произведений).

Кроме того, нетрудно видеть, что этот класс является приближающим компактным классом в силу счетной аддитивности конечномерных распределений μ_S. Действительно, каждый цилиндр C, являющийся произведением промежутков, является счетным объединением компактных цилиндров: $C = \cup_i C(i)$, $C(i) \subset C(i+1)$, являющихся произведением отрезков. Поэтому $\mu_S(C) = \lim_i \mu_S(C(i))$ в силу счетной аддитивности μ_S.

Следовательно, счетно-аддитивное продолжение существует по теореме о продолжении мер. В силу единственности продолжений полученное продолжение будет совпадать с мерами μ_S на множествах вида $B \times [0,1]^{T\setminus S}$, где B — борелевское множество в $[0,1]^S$. $\square$

Замечание 3.21. *С самого начала меру μ можно было определить на множествах виде $B \times [0,1]^{T\setminus S}$, где B — борелевское подмножество $[0,1]^S$, по формуле*

$$\mu(B \times [0,1]^{T\setminus S}) = \mu_S(B)$$

и далее действовать по той же схеме. Единственное отличие состоит в том, что в качестве компактного класса надо использовать множества $K \times [0,1]^{T\setminus S}$, где $K \subset [0,1]^S$ — компакт, и применять следующее важное свойство борелевских мер: для любой борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и борелевского множества A существует такой компакт $K \subset A$, что $\mu(A \setminus K) \le \varepsilon$ (см. задачу ниже).

Замечание 3.22. *Доказанную выше теорему легко распространить на прямые произведения X^T пространств более общего вида. Достаточно, чтобы существовало взамно однозначное отображение между X и $[0,1]$, сохраняющее борелевские множества в обе стороны (борелевский изоморфизм). Например, в качестве X можно взять $\mathbb{R}$.*

Теорему также можно применить к случаю, когда $X \subset [0,1]$ — борелевское множество. Для этого продолжим меры μ_S на $[0,1]^S$, положив $\mu_S([0,1]^S \setminus X^S) = 0$ и воспользуемся доказанной теоремой. При этом получится мера на $[0,1]^T$, обладающая свойством: для любого конечного набора индексов S случайный вектор $(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$ почти всегда лежит в X^S и имеет заданное распределение μ_S. Наконец, используя топологические теоремы об изоморфизмах борелевских множеств, можно распространить этот результат на случай, когда X — борелевское подмножество полного сепарабельного метрического пространства.

Пример 3.23. *Из теоремы Колмогорова легко следует, что для любого семейства борелевских вероятностных мер $\{\mu_t\}$, $t \in T$ на прямой можно определить их прямое произведение*

$$\mu = \prod_{t\in T} \mu_t.$$

На множестве $A = A_{t_1} \times A_{t_2} \cdots \times A_{t_n} \times \mathbb{R}^{T\setminus S}$, $A_{t_i} \subset \mathbb{R}$ имеем

$$\mu(A) = \prod_{t_i\in S} \mu_{t_i}(A_{t_i}).$$

Пример 3.24. *Пусть $\Omega = \{0,1\}$ — двухточечное множество. Положим $P(\{1\}) = p$, $P(\{0\}) = 1-p$. Определим меру P^∞ (произведение счетного числа копий P) на счетном произведении Ω^∞. Тогда $\omega \in \Omega^\infty$ имет вид $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_i, \cdots)$, где каждая координата ω_i равна либо 0, либо 1. Последовательность $\{\omega_i\}$ является последовательностью случайных величин на пространстве Ω^∞ с мерой P^∞. Это — последовательность независимых бернуллиевских с.в.*

Занятие 3

1) (Пополнение меры). Пусть μ — конечная неотрицательная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Доказать, что множества вида $B \cup C$, где $B \in \mathcal{A}$, $C \subset A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$ образуют σ-алгебру. Зададим на этих множествах меру μ формулой $\mu(B \cup C) = \mu(B)$. Доказать, что продолжение задает счетно-аддитивную меру.
2) (Цилиндрическая σ-алгебра). Пусть $X = \prod_{t\in T} X_t$ — прямое произведение пространств. Пусть каждое X_t наделено σ-алгеброй $\mathcal{A}_t$. Пусть $\mathcal{A}^T$ — цилиндрическая σ-алгебра, порожденная цилиндрами $C_{t_1} \times C_{t_2} \cdots C_{t_n} \times \prod_{t\in T\setminus S} X_t$, $S = \{t_1, \cdots, t_n\}$. Доказать, что $\mathcal{A}^T$ есть объединение всех σ-алгебр $\mathcal{A}^C$, где C — произвольное счетное подмножество T.
3) Построить пример счетного множества, алгебры на нем и конечно-аддитивной функции множеств на этой алгебре, которая не является счетно-аддитивной.
4*) Доказать, что совокупность борелевских множеств на прямой имеет мощность континуума.
5) Описать σ-алгебры, порожденные 1) всеми конечными подмножествами, 2) всеми счетными подмножествами, 3) всеми бесконечными подмножествами, 4) всеми несчетными подмножествами.
6) Пусть μ — борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, принимающая значение 0 на каждом одноэлементном множестве. Доказать, что функция $A \to P(A)$ принимает все значения от 0 до 1.

7) Доказать, что для любой борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и борелевского множества A существует такой компакт $K \subset A$, что $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$.
8) Доказать, что следующие множества из $\mathbb{R}^\infty$ являются измеримыми относительно цилиндрической σ-алгебры ($x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty$)
   1) $\{x : \sup x_n > a\}$, $\{x : \inf x_n < a\}$
   2) $\{x : \overline{\lim} x_n \leq a\}$, $\{x : \underline{\lim} x_n < a\}$
   3) множество тех x, для которых предел $\lim_{n\to\infty} x_n$ существует и конечен
9) Носителем борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$ называется наименьшее замкнутое множество, имеющее меру 1. Доказать, что для любой вероятностной борелевской меры на $\mathbb{R}^n$ существует носитель. Доказать, что для любого замкнутого множества X на прямой существует мера с носителем X.

4. Вероятностное пространство. Случайные величины. Характеристики случайных величин. Основные вероятностные распределения. Случайный вектор. Независимость.

Определение 4.1. *Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — некоторое множество (пространство элементарных исходов), $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω, P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$.*

Упражнение 4.2. *(σ-алгебра, порожденная отображением) Если $F : X \to Y$ — отображение между множествами, а $\mathcal{B}$ — σ-алгебра на Y, то система множеств $\{F^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\}$ является σ-алгеброй на X.*

Определение 4.3. *(Измеримые отображения) Отображение $F : \Omega \to Y$, где Y — множество, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{B}$ называется измеримым ($\mathcal{B}$-измеримым), если $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, для любого $B \in \mathcal{B}$.*

Как правило, отображения, которые мы будем рассматривать, будут принимать значения в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ всегда будет наделяться борелевской σ-алгеброй. Следовательно, измеримым отображением $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ будет считаться любое отображение со свойством $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для любого борелевского B.

Определение 4.4. *Случайной величиной $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется любое измеримое отображение из Ω в $\mathbb{R}$. Случайным вектором $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется любое измеримое отображение из Ω в $\mathbb{R}^n$.*

Определение 4.5. *(Образы мер) Каждое измеримое отображением $F : \Omega \to Y$, где Y — множество, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{B}$, определяет меру-образ $\mu = P \circ F^{-1}$ на $\mathcal{B}$ по формуле*

$$\mu(A) = P(F^{-1}(A)).$$

Упражнение 4.6. *Докажите, что такое определение корректно задает вероятностную меру на σ-алгебре $\mathcal{B}$.*

Случайные величины

Нетрудно проверить, что условие измеримости случайной величины выполнено, если любое множество

$$\xi^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < a\}$$

является $\mathcal{F}$-измеримым.

Определение 4.7. *Борелевская вероятностная мера μ_ξ на $\mathbb{R}$, определенная равенством*

$$\mu_\xi(B) = P(\{\omega : \xi(\omega) \in B\}),$$

где $B \subset \mathbb{R}$ — борелевское множество, называется распределением ξ.

Другими словами — μ_ξ является мерой-образом P при отображении ξ.

Для описания с.в. обычно применяют так называемые функции распределения. Они однозначно задают меру на прямой (см. пример 3.12).

Определение 4.8. *Функция $\mu_\xi((-\infty, t)) = P(\{\omega : \xi(\omega) < t\})$ называется функцией распределения с.в. ξ и обозначается F_ξ.*

Как нетрудно убедиться, F_ξ является возрастающей, непрерывной слева функцией. При этом $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Наоборот, любая такая функция F задает некоторую меру на прямой по формуле

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Пример 4.9. *Если ξ — бернуллиевская с.в., то $F(t) = 0$, если $t \le 0$, $F(t) = 1 - p$, если $0 < t \le 1$ и $F(t) = 1$, если $t \ge 1$.*

С.в. ξ называется дискретной, если ξ принимает конечный (счетный) набор значений (с точностью до события нулевой вероятности). В этом случае мера μ_ξ оказывается сосредоточенной на конечном (счетном) числе точек, а функция F_ξ — монотонная функция, растущая "скачками". Примерами дискретных случайных величин могут служить биномиальные и пуассоновские случайные величины.

Определение 4.10. *С.в. ξ называется непрерывной, если F_ξ имеет представление*

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x) dx$$

для некоторой функции f_ξ, называемой плотностью с.в. ξ.

Очевидно, f_ξ неотрицательна и обладает свойством

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)\ dx = 1.$$

Приведем ниже примеры некоторых классических вероятностных распределений.

Пример 4.11. *(Равномерное распределение.) С.в. ξ, равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$, имеет плотность распределения*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b] \\ 0,\ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Здесь $a < b$. Функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < a, \\ \frac{x-a}{b-a},\ x \in [a, b] \\ 1,\ x > b. \end{cases}$$

Пример 4.12. *(Гауссовское распределение.) С.в. ξ имеет гауссовское (нормальное) распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, если*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда

$$F_\xi(x) = \Phi\Bigl(\frac{x-a}{\sigma}\Bigr),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$.

Замечание 4.13. *Соотношение*

$$\int_{\mathbb{R}} te^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi}$$

следует из формулы замены переменных и теоремы Фубини

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\Bigr)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\ drd\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\ dr = 2\pi.$$

Отсюда с помощью линейной замены переменной легко получаем, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ является вероятностной плотностью.

Пример 4.14. *(Показательное распределение.) С.в. ξ имеет (одностороннее) показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Пример 4.15. *(Распределение Коши.) С.в. ξ имеет распределение Коши с параметром $\theta > 0$, если*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\theta}{\theta^2 + x^2}.$$

Тогда

$$F_\xi(x) = \frac{\pi/2 + \operatorname{arctg}(x/\theta)}{\pi}.$$

Замечание 4.16. *Помимо упомянутых типов с.в. встречаются еще так называемые сингулярные с.в. Для сингулярной с.в. мера μ_ξ сосредототочена на множестве, имеющем меру Лебега нуль (например, канторовском). Согласно известной теореме теории функций распределение на прямой может быть представлено единственным образом (с точностью до константы) в виде суммы непрерывного, дискретного и сингулярного распределений.*

Определение 4.17. *Математическим ожиданием с.в. ξ называется величина*

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) \ dP,$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Лебега.

Упражнение 4.18. *Убедитесь, что определение совпадает в данным ранее в случае дискретных с.в.*

Определение 4.19. *Дисперсией с.в. ξ называется величина*

$$D\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

Замечание 4.20. *Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных с.в., упомянутые выше, остаются в силе и для непрерывных с.в.*

Теорема 4.21. *(Неравенство Иенсена). Если f — выпуклая функция, то*

$$\mathbb{E}f(\xi) \geq f(\mathbb{E}\xi).$$

Доказательство. В силу выпуклости f выполнено неравенство

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

Положим $x = \xi$, $y = \mathbb{E}\xi$. Тогда

$$f(\xi) \geq f(\mathbb{E}\xi) + f'(\mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi).$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей. Так как

$$\mathbb{E}\big(f'(\mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)\big) = f'(\mathbb{E}\xi)\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi) = 0,$$

немедленно получаем искомое неравенство. □

Теорема 4.22. *Если ξ — непрерывная с.в. и $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, то*

$$\mathbb{E}\xi = \int_\mathbb{R} x f_\xi(x) \ dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу для неотрицательной с.в. (почему?). Согласно определению интеграла Лебега, $\mathbb{E}\xi = \lim_n \mathbb{E}\xi_n$, где в качестве $\{\xi_n\}$ можно взять

$$\xi_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n} I_{\{\frac{k}{2^n} < \xi \leq \frac{k+1}{2^n}\}}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\xi_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n} P(\frac{k}{2^n} < \xi \le \frac{k+1}{2^n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n}\mu_\xi((\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n} \int_{\frac{k+1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f_\xi(x)\ dx = \int \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n} I_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\big) f_\xi(x)\ dx.$$

Остается заметить, что $\sum_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{k}{2^n} I_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$ — монотонная последовательность, равномерно сходящаяся к функции x. Существование $\int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\ dx$ и искомое равенство следует из теоремы о монотонной сходимости. □

Упражнение 4.23. *Более общим образом, для любой борелевской функции g*

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int g(x)\ d\mu_\xi.$$

Пример 4.24. *Пусть ξ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Тогда*

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 0, \quad D\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 1$$

(первое соотношение вытекает из нечетности функции, а второе — из формулы интегрирования по частям). Используя линейную замену переменной, нетрудно показать, что $\mathbb{E}\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$, если ξ имеет распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

Упражнение 4.25. *Найдите математическое ожидание и дисперсию равномерной и показательно распределенной с.в.*

Заметим, что не все с.в. обладают математическим ожиданием и дисперсией (например, распределение Коши не обладает ни тем, ни другим).

Также в теории вероятностей используются моменты порядка k и центральные моменты

$$\mathbb{E}\xi^k,\ \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k.$$

Из конечности абсолютного момента порядка k

$$\mathbb{E}|\xi|^k = \int |x|^k\ d\mu_\xi < \infty$$

следует конечность абсолютных моментов низшего порядка (в силу неравенства Гельдера или Иенсена). Для существование математического ожидания (дисперсии) необходима конечность первого (второго) момента.

Случайные векторы

Определение 4.26. *Случайный вектор $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется непрерывным, если мера $\mu_\xi = P\circ\xi^{-1}$ обладает плотностью относительно меры Лебега, т.е. существует функция $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию*

$$\int \rho\ dx = 1$$

и

$$P(\xi \in B) = \mu_\xi(B) = \int_B \rho\ dx.$$

Определение 4.27. *Случайные величины $\{\xi_i\}$ называются независимыми в совокупности, если*

$$P(\xi_1 \in B_1, \cdots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

для любого набора борелевских множеств $B_i \subset \mathbb{R}$.

Определение 4.28. *Маргинальным распределением вектора ξ называется одномерное распределение его i-й компоненты ξ_i*

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_n)$$

Нетрудно видеть, что i-е маргинальное распределение непрерывного случайного вектора задается формулой

$$P(\xi_i \in B) = \int_{\{x : x_i \in B\}} \rho_\xi \, dx.$$

Существует простой критерий независимости совокупности случайных величин.

Теорема 4.29. *Компоненты $\{\xi_i\}$ случайного вектора ξ являются независимыми в совокупности тогда и только тогда, когда многомерная функция распределения ξ, заданная формулой $F(x) = P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_i < x_i, \cdots, \xi_n < x_n)$ представляется в виде произведения*

$$F(x) = \prod_{i=1}^{d} F_i(x_i),$$

где F_i — функция распределения соответствующего маргинального распределения.

Доказательство. Необходимость немедленно следует из определения. Далее для упрощения рассуждений положим $n = 2$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} P(a_1 \le \xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2) &= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1) \\ &= (F_1(b_1) - F_1(a_1))(F_2(b_2) - F_2(a_2)) = P_1(a_1 \le \xi_i < b_1))P_2(a_2 \le \xi_2 < b_2). \end{aligned}$$

Далее, в силу счетной аддитивности P, P_1, P_2, равенство распространяется на множества более общего вида, а именно

$$P(\xi \in I_1 \times I_2) = P_1(\xi_1 \in I_1) P_2(\xi_2 \in I_2),$$

где I_i — любые счетные дизъюнкные объединения полуинтервалов и их дополнения. В частности, соотношение верно, если I_i — произвольное открытое (замкнутое) подмножество прямой. Пусть теперь I_i — произвольные борелевские множества. Согласно задаче 7 Занятия 3 существуют счетные объединения компактных множеств $I_i^{(n)} \subset I_i$, удовлетворяющие соотношению $P_i(I_i \setminus \cup_n I_i^{(n)}) = 0$. Применяя то же свойство, дополнительно можно добиться того, чтобы $P(I_1 \times I_2 \setminus \cup_n I_1^{(n)} \times I_2^{(n)}) = 0$. В силу того, что равенство выполнено для множеств $\cup_n^N I_1^{(n)}$, искомое равенство следует из непрерывности мер P, P_1, P_2. □

На языке теории меры последнее свойство равносильно условию: мера μ_ξ представляется в виде прямого произведения одномерных мер.

Пример 4.30. *Пусть F — функция распределения с.в. ξ. Нетрудно показать, что функция $G(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ не убывает, непрерывна слева и $G(-\infty) = 0$, $G(+\infty) = 1$. Следовательно, G — функция распределения некоторой с.в. Проверьте, что $G = F_\eta$, где $\eta = \min(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ и $\{\xi_i\}$ — независимые с.в. с функцией распределения F.*

Пример 4.31. *Пусть $\{X_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с функцией распределения F. Пусть N — независимая от них пуассоновская с.в. с параметром λ. Найти функцию распределения с.в. $\xi = \max_{i \le N+1} X_i$.*

$$\begin{aligned} P(\xi < x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi < x, N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 < x, \cdots, \xi_{k+1} < x, N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 < x) \cdots P(\xi_{k+1} < x) P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{k+1}(x) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = F(x) e^{\lambda(F(x)-1)}. \end{aligned}$$

Теорема 4.32. *Пусть ξ, η — независимые непрерывные случайные величины с плотностями распределения f_ξ, f_η. Тогда плотность распределения с.в. $\theta = \xi + \eta$ задается формулой свертки*

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(x - t) \, dt.$$

Доказательство. Действительно,

$$P(\xi + \eta \le x) = \int\int_{t+s \le x} f_\xi(t) f_\eta(s) \, dt ds.$$

Применяя теорему Фубини и линейную замену переменной, получаем

$$P(\xi+\eta\le x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x-t} f_\xi(t)\ f_\eta(s)\ dsdt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\ f_\eta(s-t)\ dsdt$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\ f_\eta(s-t)\ dt\Big)\ ds.$$

□

Пример 4.33. *Пусть ξ и η — независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ с.в. Применяя предыдущую теорему, получаем*

$$f_{\xi+\eta}(x)=\lambda\big([0,1]\cap[x-1,x]\big)=\max(0,1-|x-1|).$$

Занятие 4

1) Найти плотность распределения с.в. $g(\xi)$, где
   1) $g=-\log x$, ξ равномерно распределена на $[0,1]$.
   2) $g=|x|$, $\xi\sim\mathcal{N}(0,1)$.
   3) $g=\frac{1}{x^2}$, $\xi\sim\mathcal{N}(0,1)$.
   4) $g=\sqrt{x}+1$, ξ равномерно распределена на $[0,1]$.
2) (Моделирование случайных величин). Пусть ξ — с.в. и F_ξ — ее функция распределения. Пусть η — с.в., равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Положим $\theta=G(\eta)$, где
$$G(t)=\inf\{x: F_\xi(x)>t\}.$$
Покажите, что распределения ξ и θ совпадают.
3) Найти $\mathbb{E}\xi^k$, $\mathbb{E}|\xi|^k$ для любого $k\in\mathbb{N}$, если 1) $\xi\sim\mathcal{N}(0,1)$, 2) ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.
4) С.в. θ является суммой двух независимых с.в., $\theta=\xi+\eta$, одна из которых непрерывна, а другая дискретна. Найдите ее плотность распределения в терминах функций распределений ξ и η.
5) С.в. θ является суммой двух независимых с.в., $\theta=\xi+\eta$, одна из которых дискретна, а другая сингулярна. Доказать, что θ сингулярна.
6) (В.И. Арнольд) Найти математическое ожидание площади проекции куба с ребром 1 на плоскость при изотропно распределенном случайном направлении проектирования.
7) (Неравенство Гиббса) Пусть ξ, η — случайные величины, f_ξ, g_η — плотности их распределений. Доказать неравенство
$$\mathbb{E}\log f_\xi(\xi)\ge\mathbb{E}\log f_\eta(\xi).$$
8) Доказать неравенство для положительных чисел $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\ge\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\Big)^{-1}$.
9) Найдите распределение суммы двух независимых с.в., если они 1) стандартные гауссовские, 2) показательные с разными параметрами, 3) показательные с одинаковыми параметрами.
10) Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых бернуллиевских с.в. с $p=1/2$. Докажите, что с.в. $\eta=\sum_{n=1}^\infty\frac{\xi_n}{2^n}$ равномерно распределена на $[0,1]$.
11) Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность независимых с.в., имеющих равномерное распределение на $[0,1]$ Пусть
$$\tau(x)=\{\min_n: S_n=\sum_{i=1}^n\xi_i\ge x\}.$$
Доказать, что $P(\tau>n)=\frac{x^n}{n!}$.
12) Имеются случайные величина, равномерно распределенная на $[0,1]$, и симметричная монетка. Как с их помощью построить с.в. с плотностью
$$f(x)=3\Big(\big(x-\frac{1}{2}\big)^2+\frac{1}{8}|1-2x|^{1/2}\Big),\ x\in[0,1]?$$
13) Доказать соотношения
   1) $\mathbb{E}|\xi|=\int_0^\infty\mu(|\xi|>t)\ dt$.
   2) Если функция распределения ξ имеет обратную, то $\mathbb{E}\xi=\int_0^1 F_\xi^{-1}(t)\ dt$.

3) Если $F_\eta \le F_\xi$, то $\mathbb{E}\eta \ge \mathbb{E}\xi$.

4*) (корреляционное неравенство) $\int_0^1 F_\xi^{-1}(t)F_\eta^{-1}(t)\,dt \ge \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta$.

14) Доказать, что $\min(x,y)$ и $\max(x+y-1,0)$ являются двумерными функциями распределения. Доказать, что для любой двумерной функции распределения F выполнены нераввенства

$$\max(F_1(x)+F_2(y)-1,0)\le F(x,y)\le \min(F_1(x),F_2(x)),$$

где F_1 и F_2 — соответствующие маргинальные функции распределений.

15) Пусть ξ и η — ограниченные случайные величины, удовлетворяющие соотношению

$$\mathbb{E}(\xi^m\eta^n)=\mathbb{E}(\xi^m)\mathbb{E}(\eta^n).$$

Доказать, что ξ и η независимы.

5. Случайные векторы. Геометрические вероятности. Ковариация и корреляция.

Случайные векторы (продолжение)

Приведем еще один пример на формулу свертки.

Пример 5.1. *Распределение χ^2.*

Пусть ξ_1,ξ_2 — независимые стандартные гауссовские (т.е. $\xi_i\sim\mathcal{N}(0,1)$) случайные величины. Найдем распределение с.в.

$$\eta=\xi_1^2+\xi_2^2.$$

Плотность распределения ξ_1^2 находится из соотношения

$$P(\xi_1^2\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$f_{\xi_1^2}(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}},\ x>0.\end{cases}$$

Следовательно, по формуле свертки, при $x>0$

$$\begin{aligned} f_\eta(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{(x-t)}{2}}}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt\\ &=B\Big(\frac12,\frac12\Big)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x}{2}}=\frac12 e^{-\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Применяя индукцию, легко доказать что с.в.

$$\eta=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2,$$

где $\xi_i\sim\mathcal{N}(0,1)$ и все ξ_i независимы, имееет плотность распределения

$$f_\eta(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0\\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\ x>0.\end{cases}$$

Это распределение называется распределением χ^2 с n степенями свободы.

Для вычисления формулы плотности для другого классического распределения мы применим следующее простое наблюдение, следующее непосредственно из формулы замены переменной

Предложение 5.2. *Пусть непрерывные случайные векторы ξ и η с плотностями распределения f_ξ,f_η связаны соотношением $F(\eta)=\xi$, где $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда выполнено соотношение:*

$$f_\eta=f_\xi(F)|\det DF|.$$

Пример 5.3. *Распределение Стьюдента.*

Найдем распределение с.в.

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}},$$

где $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ и все ξ_i независимы. Для этого рассмотрим двумерный случайный вектор

$$(X,Y) = \Bigl(\xi_0, \xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\Bigr).$$

В силу независимости его плотность распределения задается формулой ($y>0$)

$$f_{X,Y} = C(n) e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}.$$

Пусть (U,V) — случайный вектор, связанный с (X,Y) соотношением

$$U = X, \ V = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}.$$

Очевидно, V имеет искомую плотность распределения. Выразим X,Y через U,V:

$$X = U, \ Y = n\frac{U^2}{V^2}$$

Модуль якобиана этого отображения, как легко проверить, равен

$$\frac{2nU^2}{|V|^3}.$$

По предыдущему предложению вектор (U,V) имеет плотность распределения

$$f_{U,V} = C(n)\exp\Bigl(-\frac{u^2}{2}-\frac{nu^2}{2v^2}\Bigr)\frac{|u|^{n-2}}{|v|^{n-2}}\frac{u^2}{|v|^3}.$$

Для того, чтобы получить плотность V , необходимо проинтегрировать полученную функцию по u. Получаем

$$f_V = \frac{C(n)}{|v|^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^n\exp\Bigl(-\frac{(n+v^2)u^2}{2v^2}\Bigr)\,du.$$

Сделав в интеграле замену переменной

$$s = u\frac{\sqrt{n+v^2}}{v},$$

получим, что для некоторой подходящей константы $C(n)$ плотность V равна

$$f_V = \frac{C(n)}{(n+v^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ниже приведена более точная формулировка (с точной константой).

Следствие 5.4. *Случайная величина*

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}}$$

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы, которое задается плотностью

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Геометрические вероятности

Задачами на геометрические вероятности называют задачи, где в качестве случайных выступают геометрические объекты (точки подмножеств плоскости или пространства, многообразия, прямые, многоугольники и т.п.). В период становления теории вероятностей такие задачи выступали иногда источником "парадоксов", ввиду сложностей, возникающих при их формализации (см., например, "парадоксы Бертрана", [6]). В задачах такого рода, действительно, необходима аккуратная формализация (что именно выступает в качестве случайной величины, какие с.в. независимы и т.п.). Следуя традиции, под "случайной точкой"ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ подразумевается случайный вектор ξ, принимающий значения в A, причем его распределение μ_ξ является нормализованной мерой Лебега $\frac{1}{\lambda(A)}\lambda|_A$. В случае многообразий вместо меры Лебега выступает нормализованная поверхностная мера.

Пример 5.5. Игла Бюффона. *Плоскость разлинована параллельными линиями ширины* 1. *На плоскость "случайным образом" бросается игла длины* 1. *Найти вероятность пересечения с полоской.*

Будем считать, что расстояние x от центра иглы до ближайшей полоски распределено равномерно на $[0,1/2]$. Кроме этого, будем считать, что угол падения φ (угол между иглой и прямой, перпендикулярной полоскам) распределен равномерно на $[0,\pi/2]$. Также считаем, что x и φ — независимые с.в.. Пересечение произойдет, если $x < \frac{1}{2}\cos\varphi$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/2} 2\int_0^{\frac{1}{2}\cos\varphi} dx\Big)\, d\varphi = \frac{2}{\pi}.$$

Полученная формула может служить основой для экспериментального вычисления числа π.

Пример 5.6. *Две точки P_1 и P_2 независимо и равномерно распределены в диске D радиуса r. Доказать, что математическое ожидание расстояния ρ между ними равно*

$$f(r) := \mathbb{E}\rho = \frac{128r}{45\pi}.$$

Вместо фиксированного радиуса r рассмотрим аналогичную задачу для дисков радиуса $r+h$ для малых значений h и изучим поведение функции $f(r+h)$. Наша цель — получит выражение для $f'(r)$. Если точки P_1, P_2 распределены (равномерно и независимо) в диске D_h радиуса $r+h$, то (в силу независимости)

$$P(P_1 \in D; P_2 \in D) = \Big(\frac{\pi r^2}{\pi(r+h)^2}\Big)^2 = 1 - \frac{4h}{r} + o(h).$$

$$P(P_1 \in D; P_2 \in D_h \setminus D) = \Big(\frac{\pi r^2}{\pi(r+h)^2}\Big)\Big(1 - \frac{\pi r^2}{\pi(r+h)^2}\Big) = \frac{2h}{r} + o(h).$$

Очевидно, $P(P_1 \in D_h \setminus D; P_2 \in D_h \setminus D) = o(h)$. Тогда

$$f(r+h) = \mathbb{E}\rho = \mathbb{E}(\rho I_{P_1\in D; P_2\in D}) + 2\mathbb{E}(\rho(r+h) I_{P_1\in D; P_2\in D_h\setminus D}) + o(h). \tag{1}$$

Далее заметим, что $\frac{1}{P(P_1\in D;P_2\in D)}\mathbb{E}(\rho I_{P_1\in D;P_2\in D}) = f(r)$. Следовательно,

$$\mathbb{E}(\rho I_{P_1\in D;P_2\in D}) = f(r)\Big(1 - \frac{4h}{r} + o(h)\Big).$$

Далее,

$$\mathbb{E}(\rho(r+h)I_{P_1\in D;P_2\in D_h\setminus D}) = \frac{1}{P(P_1 \in D; P_2 \in D_h \setminus D)}\mathbb{E}(\rho(r+h)I_{P_1\in D;P_2\in D_h\setminus D})\Big(\frac{2h}{r} + o(h)\Big).$$

С точностью до $o(h)$ величина $\frac{1}{P(P_1\in D;P_2\in D_h\setminus D)}\mathbb{E}(\rho(r+h)I_{P_1\in D;P_2\in D_h\setminus D})$ есть среднее расстояние от точки диска радиуса r до точки на границе диска. Это расстояние удобно вычислять в полярной системе координат с центром в точке на границе диска. Оно равно

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2r\cos\varphi} s^2\, ds d\varphi = \frac{32r}{9\pi} + o(h).$$

Из (1) получаем

$$f'(r) = -\frac{4}{r}f(r) + \frac{128}{9\pi}.$$

Решаем полученное уравнение. Принимая во внимание, что $f(0) = 0$, легко получаем искомое соотношение.

Корреляция и ковариация

Определение 5.7. *Ковариацией двух случайных величин ξ и η называют величину*

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta).$$

Корреляцией ξ и η называют величину

$$\operatorname{cor}(\xi,\eta)=\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}\cdot\sqrt{\mathbb{E}(\eta-\mathbb{E}\eta)^2}}.$$

Нетрудно проверить, что для независимых ξ и η обе величины равны нулю (обратное неверно!). Корреляция является безразмерной величиной и, в силу неравенства Коши-Буняковского, по модулю не превосходит 1.

Ковариация является неотрицательной квадратичной формой на пространстве случайных величин с конечным вторым моментом.

Занятие 5

1) Пусть с.в. u равномерно распределена на $[0,1]$. Найти распределение с.в. $1+\left[\frac{\log u}{\log(1-p)}\right]$ ($[x]$ — целая часть числа x).
2) Плотности распределения независимых с.в. X, Y задаются формулами
$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}, & x>0.\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & |y|\ge 1\\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y<1.\end{cases}$$
Найти распределение XY.
3) С.в. X_1,X_2,X_3 независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Доказать, что с.в.
$$Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2},\ Y_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\ Y_3=X_1+X_2+X_3$$
независимы и найти их распределения.
4) Пусть пара с.в. (U,V) имеет равномерное распределение на единичном круге $\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$, $W=u^2+v^2$. Положим
$$X=U\sqrt{-\frac{2\ln W}{W}},\ Y=V\sqrt{-\frac{2\ln W}{W}}.$$
Показать, что X,Y независимы и имеют $\mathcal{N}(0,1)$-распределение.
5) Доказать, что с.в. $(XY)^Z$, где X,Y,Z независимы и равномерно распределены на $[0,1]$, равномерно распределена на $[0,1]$.

6*) Пусть $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых с.в. с плотностями распределения, равными
$$f_{\xi_j}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C_pe^{-\frac{x^p}{p}}, & x>0,\end{cases}$$
$p>0$. Найти распределение с.в.
$$X_{n,p,k}=\frac{\sum_{j=1}^k\xi_j^p}{\sum_{j=1}^n\xi_j^p},\ 1\le k\le n.$$

7) Три мухи случайно и независимо садятся на круглый арбуз радиуса 1. Если расстояние между двумя из них меньше $\pi/2$, то обе улетают. Найти вероятности того, что 1) на арбузе останется одна муха, 2) на арбузе останутся три мухи.
8) Три случайные точки независимо и равномерно распределены на окружности. Найти вероятность того, что треугольник, образованный ими, будет тупой.
9) Три случайные точки независимо и равномерно распределены на сфере радиуса 1. Найти математическое ожидание площади образованного ими сферического треугольника.
10) Докажите, что с.в. $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, где φ равномерно распределен на $[0,2\pi]$, имеют нулевую корреляцию, но не являются независимыми.

6. Теорема Радона-Никодима. Условное математическое ожидание. Условные меры.

Теорема Радона-Никодима

При работе с измеримыми отображениями на пространствах, наделенных мерами, важную роль играет следующее уточнение понятия измеримости.

Пусть μ — верооятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$. Напомним, что с каждой мерой можно связать σ-алгебру μ-измеримых множеств $\mathcal{F}_\mu$ (пополнение $\mathcal{F}$ по μ). А именно, множество A называется μ-измеримым, если оно имеет вид $A = B \cup C$, $B \subset \mathcal{F}$, а множество C имеет внешнюю μ-меру нуль. При этом μ продолжается на $\mathcal{F}_\mu$ по формуле $\mu(A) = \mu(B)$.

Определение 6.1. *Функция f называется μ-измеримой, если f измерима относительно $\mathcal{F}_\mu$.*

Упражнение 6.2. *Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$. Докажите, что для любой μ-измеримой функции f существует ей эквивалентная $\mathcal{F}$-измеримая функция g (т.е. $\mu\{f \neq g\} = 0$).*

В дальнейшем, говоря о вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, мы будем подразумевать (не оговаривая это специально), что оно полно, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P$. В таком случае, множество измеримых случайных величин и P-измеримых случайных величин будет совпадать.

Определение 6.3. *Пусть даны вероятностные меры μ и ν на σ-алгебре $\mathcal{F}$.*

Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно μ, если $\nu(A) = 0$ для всякого множества $A \in \mathcal{F}$ с $\mu(A) = 0$.

Мера ν называется сингулярной относительно μ, если существует такое $S \in \mathcal{F}$, что $\mu(S) = 0$ и $\nu(S^c) = 0$.

Теорема 6.4. *(Радона-Никодима). Мера ν абсолютно непрерывна относительно μ в точности тогда, когда существует такая μ-измеримая интегрируемая функция f, что*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

для любого $A \in \mathcal{F}$.

Функция f называется плотностью ν относительно μ. Обозначение $\nu = f \cdot \mu$.

Доказательство. Рассмотрим новую меру $\lambda = \mu + \nu$. Рассмотрим следующий линейный функционал на пространстве $L^2(\lambda)$ классов эквивалентности квадратично интегрируемых по мере λ функций:

$$L(\varphi) = \int \varphi d\mu, \ \varphi \in L^2(\lambda).$$

Заметим, что функционал корректно определен. Действительно, если $\lambda(\{x : \tilde{\varphi}(x) \neq \varphi(x)\}) = 0$, то $\mu(\{x : \tilde{\varphi}(x) \neq \varphi(x)\}) = 0$. Таким образом, $L(\varphi)$ не меняется при выборе другого представителя из класса эквивалентности.

Далее,

$$|L(\varphi)| \leq \int |\varphi| d\mu \leq \int |\varphi| d\lambda \leq \|1\|_{L^2(\lambda)} \|\varphi\|_{L^2(\lambda)}.$$

Следовательно, L непрерывен на $L^2(\lambda)$ и по теореме Рисса-Фишера существует такая функция $\psi \in L^2(\lambda)$, что

$$L(\varphi) = \int \varphi d\mu = \int \varphi \psi d\lambda. \tag{2}$$

Поэтому

$$\mu = \psi \cdot \lambda, \ \nu = (1 - \psi) \cdot \lambda. \tag{3}$$

Покажем, что $\frac{1-\psi}{\psi} \cdot \mu = \nu$. Пусть

$$\Omega_0 = \{\psi \leq 0\}.$$

Подставив $\varphi = I_{\Omega_0}$ в (2), получим $\mu(\Omega_0) \leq 0$, следовательно $\mu(\Omega_0) = 0$. В силу абсолютной непрерывности $\nu(\Omega_0) = 0$.

Далее,

$$\Omega_1 = \{\psi \geq 1\}.$$

Подставив $\varphi = I_{\Omega_1}$ в (2), получим $\mu(\Omega_1) \geq \lambda(\Omega_1)$. Так как $\mu \leq \lambda$, то $\nu(\Omega_1) = 0$. Поэтому функция $\frac{1-\psi}{\psi}$ корректно определена μ-почти всюду и ν-п.в. неотрицательна.

Положим $f = \frac{1-\psi(x)}{\psi(x)}$, $x \notin \Omega_0 \cup \Omega_1$ и $f = 0$, $x \in \Omega_0 \cup \Omega_1$. Возьмем теперь произвольное множество $A \in \mathcal{F}$. В силу (3)

$$\int_A f \cdot d\mu = \int_{A \setminus \Omega_0 \cup \Omega_1} \frac{1-\psi(x)}{\psi(x)} d\mu = \int_{A \setminus \Omega_0 \cup \Omega_1} (1-\psi(x))\, d\lambda = \int_{A \setminus \Omega_0 \cup \Omega_1} d\nu = \nu(A).$$

□

Условное математическое ожидание

1) Условное математическое ожидание относительно события

Простейшей версией понятия условного математического ожидания является понятие условного математического ожидания относительно события B ненулевой вероятности:

$$\mathbb{E}(\xi|B) = \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot I_B)}{P(B)}.$$

Для $\xi = I_A$ математичесоке ожидание $\mathbb{E}(\xi|B)$ равно условной вероятности $P(A|B)$.

Несложно проверить следующее свойство :

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|B_i) P(B_i),$$

если $\{B_i\}$ — разбиение Ω на непересекающиеся множества B_i.

Пример 6.5. *(Средняя продолжительность игры.) Вы приходите в казино с k\$. За одну партию вы выигрываете 1\$ с вероятностью p и проигрываете 1\$ с вероятностью $q = 1 - p$. Если у вас остается 0\$, вы уходите. Если вы приобретаете K\$, где $K > k$ — некоторая фиксированная сумма, вы тоже уходите. Вычислите среднюю продолжительность игры.*

Пусть $\tau(k)$ — с.в., равная числу проведенных партий при начальном капитале k (величина K фиксирована). Обозначим через η_0 с.в., равную 1 в случае выигрыша и 0 в случае проигрыша в первой партии. Предполагая конечность $\mathbb{E}\tau$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\tau(k) &= \mathbb{E}(\tau(k)|\eta_0 = 1)p + \mathbb{E}(\tau(k)|\eta_0 = 0)q \\ &= p\big(1 + \mathbb{E}\tau(k+1)\big) + q\big(1 + \mathbb{E}\tau(k-1)\big) = 1 + p\mathbb{E}\tau(k+1) + q\mathbb{E}\tau(k-1).\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\tau(K) = \tau(0) = 0.$$

Решая полученное рекуррентное уравнение, получаем при $p \neq q$

$$\mathbb{E}\tau(k) = \frac{1}{p-q}\Big[K\frac{(q/p)^k - 1}{(q/p)^K - 1} - k\Big].$$

(более подробно см. в книге [6] 1т., 1(9)).

2) Условное математическое ожидание относительно разбиений

Пусть дано разбиение $\mathcal{B}$ вероятностного пространства Ω на конечное число непересекающихся множеств положительной меры.

$$\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i, \ B_i \cap B_j = \emptyset, \ i \neq j.$$

Условным математическим ожиданием с.в. ξ относительно этого разбиения называется случайная величина

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot I_{B_i})}{P(B_i)} I_{B_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|B_i) I_{B_i}(\omega). \tag{4}$$

Замечание 6.6. *Нетрудно проверить следующие свойства условных математических ожиданий*

1)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) = \mathbb{E}\xi.$$

2) *Если* $\xi = I_A$, *то*

$$\mathbb{E}(I_A|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)I_{B_i}(\omega)$$

3) *1) + 2) влечет формулу полной вероятности.*
4) *Для любого множества* B_i

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})I_{B_i}) = \mathbb{E}(\xi I_{B_i}).$$

3) Условное математическое ожидание относительно σ-алгебры.

Определение условного математического ожидания, данное ниже, было введено А.Н. Колмогоровым в работе 1933 г. ("Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung"). Это одно из важнейших понятий теории вероятностей.

Пусть ξ — неотрицательная с.в. со свойством $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$.

Определение 6.7. *Случайная величина* $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ *называется условным математическим ожиданием* ξ *относительно* $\mathcal{B}$, *если*

1) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ *измерима относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{B}$ *и* $\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))| < \infty$
2) *Для любой ограниченной функции* φ, *измеримой относительно* $\mathcal{B}$, *выполнено равенство*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})\varphi) = \mathbb{E}(\xi\varphi).$$

Пример 6.8. *Для* σ*-алгебры* $\mathcal{B}$, *порожденной конечным (или даже счетным) набором множеств, формула (4) задает условное математическое ожидание относительно* $\mathcal{B}$. *Это немедленно вытекает из пункта 4) предыдущего замечания и измеримости функции, заданной формулой (4), относительно* $\mathcal{B}$.

Из теоремы Фубини вытекает следующий важный факт.

Пример 6.9. *Пусть* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *и* $P = \prod_{i=1}^n \mu_i$ *— прямое произведение вероятностных мер. Обозначим через* $\mathcal{F}_m$ σ*-алгебру, порожденную первыми* m *координатами. Функции, измеримые относительно* $\mathcal{F}_m$ *— это борелевские функции вида* $g(x_1, \cdots, x_m)$. *Тогда для любой интегрируемой функции* f

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_m) = \int f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)\ dx_{m+1} \cdots dx_n.$$

Пусть теперь $\mathcal{B}$ — произвольная σ-алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$ и ξ — неотрицательная интегрируемая с.в. Рассмотрим меру $\xi \cdot P$. Эта мера абсолютно непрерывна относительно ограничения μ на σ-алгебру $\mathcal{B}$. По теореме Радона-Никодима существует такая интегрируемая функция g, измеримая относительно пополнения $\mathcal{B}$ относительно P, что

$$\mathbb{E}(I_A\xi) = \int I_A \cdot \xi\ dP = \int I_A g\ dP = \mathbb{E}(I_A g)$$

для любого множества $A \subset \mathcal{B}$. Выбрав $\mathcal{B}$-измеримую модификацию, мы получим условное математическое ожидание ξ. Произвольную интегрируемую с.в. ξ надо представить в виде $\xi = \xi_+ - \xi_-$ и положить $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\xi_+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(\xi_-|\mathcal{B})$.

Теорема 6.10. *Выполнены следующие свойства*

1) *Условное математическое ожидание единственно с точностью до множества меры нуль (относительно сужения* P *на* $\mathcal{B}$*!).*
2) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \xi$ *почти наверное (т.е.* P*-п.в.) для всякой с.в.* ξ, *измеримой относительно* $\mathcal{B}$.
3) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \geq 0$ *п.н. для всякой с.в.* ξ, *т.ч.* $\xi \geq 0$ *п.н.*
4) *Для всякой ограниченной* $\mathcal{B}$*-измеримой* g

$$\mathbb{E}(\xi \cdot g|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}).$$

Вернемся опять к простейшей ситуации σ-алгебры, порожденной конечным набором множеств $\{B_i\}$. Пусть f — функция, принимающая на B_i значение x_i ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$). Тогда $\mathcal{B}$ порождена f. Формула (4) переписывается в виде

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|f = x_i)I_{\{f=x_i\}}(\omega). \tag{5}$$

Или

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})(\omega) = \mathbb{E}(\xi|f = f(\omega)).$$

Условные меры

Существует ли аналог формулы (5), если f имеет несчетное множество значений? Ответ на этот вопрос можно дать, введя понятие *условной меры.*

Определение 6.11. *Пусть Ω — пространство, наделенное σ-алгерой $\mathcal{F}$ и мерой P. Пусть Y — пространство с σ-алгеброй $\mathcal{E}$ и $F : \Omega \to Y$ — некоторое $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-измеримое отображение. Обозначим через $\nu = P \circ F^{-1}$ меру-образ. Вероятностная мера P^y на прообразе $F^{-1}(y)$, $y \in Y$ называется условной мерой, если функция $y \to P^y(A \cap F^{-1}(y))$ P-измерима и*

$$P(A) = \int_Y P^y(A \cap F^{-1}(y))\ d\nu(y).$$

Пример 6.12. *Пусть $P = f(x, y)\ dxdy$ — вероятностная мера на R^2 с положительной борелевской плотностью. Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{B}_x$, порожденную координатной функцией x. Пусть P_x — проекция (маргинальное распределение) P на ось Ox:*

$$P_x(A) = \int_{R^2} I_A(x)f(x, y)\ dxdy.$$

Она имеет плотность $f_x(x)$:

$$f_x(x) = \int f(x, y)\ dy.$$

Условной мерой P^x для каждого фиксированного x является вероятностная мера на прямой l_x, проходящей ортогонально Ox через точку $(x, 0)$, заданная плотностью

$$P^x = f^x(y)dy = \frac{f(x, y)}{f_x(y)} \cdot dy = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y)dy} \cdot dy.$$

Очевидно, P^x — вероятностная мера. Условное математическое ожидание функции ξ относительно $\mathcal{B}_x$ оказывается равным интегралу по условной мере и задается формулой

$$g(x) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}_x) = \int \xi(x, y)f^x(y)dy = \frac{\int \xi(x, y)f(x, y)\ dy}{\int f(x, y)\ dy}.$$

Действительно, эта функция $\mathcal{B}_x$-измеримима (точнее, измерима относительно пополнения $\mathcal{B}_x$ по мере Лебега). Для функции $\varphi(x)$, зависящей только от x, имеем (по теореме Фубини)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(g\varphi) = \\
&= \int_{R^2} \varphi(x)\frac{\int \xi(x, y)f(x, y)\ dy}{\int f(x, y)\ dy} f(x, y)\ dxdy = \int \Big(\int \varphi(x)\frac{\int \xi(x, y)f(x, y)\ dy}{\int f(x, y)\ dy}\ f(x, y)dy\Big)dx \\
&= \int \Big(\varphi(x)\frac{\int \xi(x, y)f(x, y)\ dy}{\int f(x, y)\ dy} \int f(x, y)dy\Big)dx = \int \varphi(x) \int \xi(x, y)f(x, y)\ dy\ dx = \mathbb{E}(\xi\varphi).
\end{aligned}$$

В общем случае вопрос о существовании условных мер оказывается довольно непростым. Оказывается, не всегда можно добиться σ-аддитивности условных мер. Тем не менее, в достаточно "хороших" ситуациях σ-аддитивные условные меры существуют (т.н. "регулярные условные меры"). Например, это так, если речь идет о борелевской мере на борелевском подмножестве полного сепарабельного метрического пространства, а σ-подалгебра порождена борелевским отображением. С этими вопросами можно подробно познакомиться в книгах [6], [1].

Отметим также, что условные меры тесно связаны с другим важным объектом, возникающим в математической физике — гиббсовскими мерами (см., например, [3]).

Занятие 6

1) Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$. Докажите, что для любой μ-измеримой функции f существует ей эквивалентная $\mathcal{F}$-измеримая функция g (т.е. $\mu\{f \neq g\} = 0$).
2) Доказать, что для $p \in [1, \infty]$ отображение $\xi \to \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ задает линейный оператор нормы 1 в пространстве $L^p(P)$. При этом этот оператор является ортогональным проектором в $L^2(P)$.

3) Рассматривается n независимых одинаково распределенных бернуллиевских с.в.. Назовем очередью последовательность из гербов (решеток), не включенную в последовательность гербов (решеток) большей длины. Например, последовательность ГГРГГРРГ содержит 5 очередей. Используя условное математическое ожидание, найти математическое ожидание числа очередей.

4) Пусть $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра, порожденнная с.в. ξ. Доказать, что для любой с.в. η существует такая борелевская функция g, что $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_\xi) = g(\xi)$ п.н.

Всюду далее $\mathbb{E}(\eta|\xi) := \mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_\xi)$ обозначает условное метематическое ожидание относительно σ-алгебры, порожденной ξ.

5*) Пусть $P = \rho\, dx$ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, f — гладкая функция, удовлетворяющая условию $|\nabla f| \neq 0$. Докажите, что $\mathbb{E}(g|f) = G(f)$, п.в. где

$$G(s) = \frac{\int_{\{f=s\}} g \frac{\rho}{|\nabla f|}\, d\sigma}{\int_{\{f=s\}} \frac{\rho}{|\nabla f|}\, d\sigma},$$

где $d\sigma$ — поверхностная мера (мера Хаусдорфа) на поверхности $\{f = s\}$. Указание: использовать формулу коплощади

$$\int_{\{f>t\}} \varphi\, dx = \int_t^\infty \int_{\{f=s\}} \frac{\varphi}{|\nabla f|}\, d\sigma\, ds.$$

6) Пусть $P = \rho(r)\, dxdy$ — вероятностная мера на плоскости, инвариантная относительно вращений. Найдите формулы для условных мер и условных математических ожиданий, порожденных функцией 1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 2) $\frac{x}{y}$.

7) На сфере введена параметризация $(\varphi, \theta) \to (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$. Найдите формулы для условных мер и условных математических ожиданий для равномерного распределения на сфере относительно σ-алгебры, порожденной функцией 1) φ, 2) θ.

8) Пусть ξ, η — независимые показательные с.в. с параметром 1. Найти формулу для условного математического ожидания $\mathbb{E}(\cdot|\xi + \eta)$.

9) Пусть ξ, η — одинаково распределенные, независимые с.в. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\xi + \eta) = \frac{\xi+\eta}{2}$.

10) Пусть ξ, η — независимые пуассоновские с.в. с параметрами λ, μ. Доказать, что

$$P(\xi = k|\xi + \eta = n) = C_n^k(\lambda/(\lambda + \mu))^k(\mu/(\lambda + \mu))^{n-k},\ 0 \leq k \leq n.$$

11) Найдите условные меры и условные математические ожидания относительно координатных функций x, y для плотностей следующего вида

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y},\ 0 \leq x \leq y < \infty, \quad f(x, y) = xe^{-x(y+1)},\ x, y \geq 0.$$

Список литературы

[1] Богачев В.И., Основы теории меры, тт. 1-2, Москва-Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006.
[2] Вентцель А.Д., Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.
[3] Георги Х.-О., Гиббсовские меры и фазовые переходы. М. Мир, 1992.
[4] Ландо С.К., Лекции о производящих функциях. М. МЦНМО, 2002.
[5] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г., Задачи по теории вероятностей. М. Наука, 1986.
[6] Ширяев А.Н., Вероятность. тт. 1-2. М. МЦНМО, 2007.
[7] Ширяев А.Н., Задачи по теории вероятностей. М. МЦНМО, 2006.
[8] Grimmet G., Stirzaker D., One thousand exercises in probability, Oxford University Press, 2001.
[9] Stirzaker D., Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.